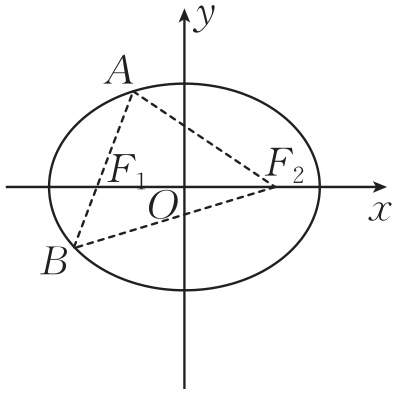
## **磨尖课08 焦比体系**

### **一、焦比体系之椭圆**

【体周长】过椭圆的左焦点的弦与右焦点构成的的周长是（如图）；

【体面积】，.（其中为的边上的高，为的边上的高，为椭圆半焦距， 为直线的倾斜角）

【焦长公式】如图，是椭圆上一点，，分别是其左、右焦点，为 ，过左焦点，是椭圆半焦距，则



；

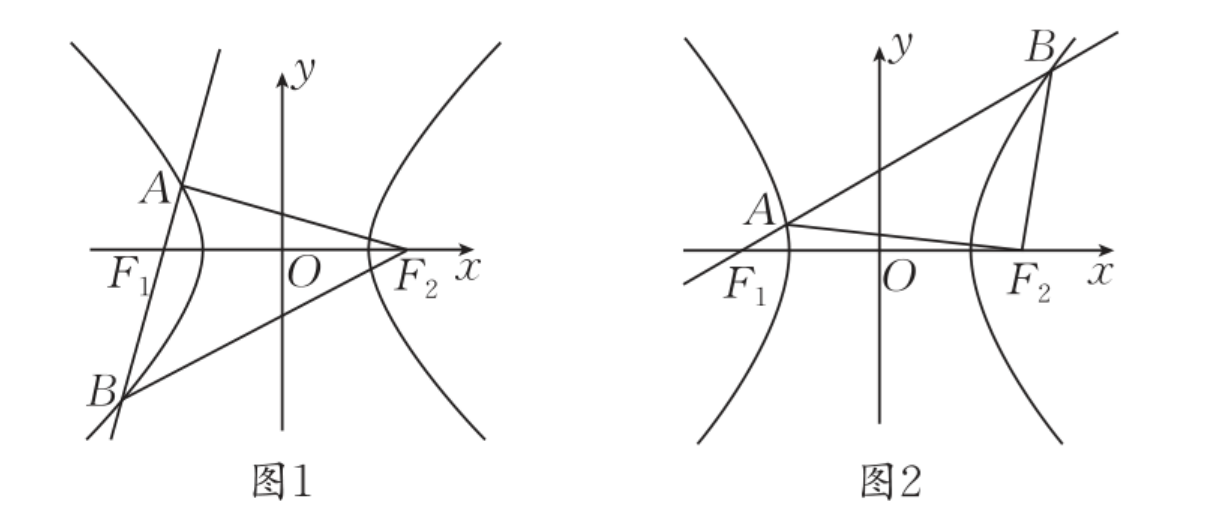
；

.

【焦比定理】已知过椭圆的左焦点的弦为,，，令，即，代入焦长公式可得.

### **二、焦比体系之双曲线**

【周长问题】若双曲线的左、右焦点分别为,，弦过左焦点，都在左支上，，则的周长为（如图1）.



【焦长公式】（1）当交双曲线于一支时，，（如图1）.

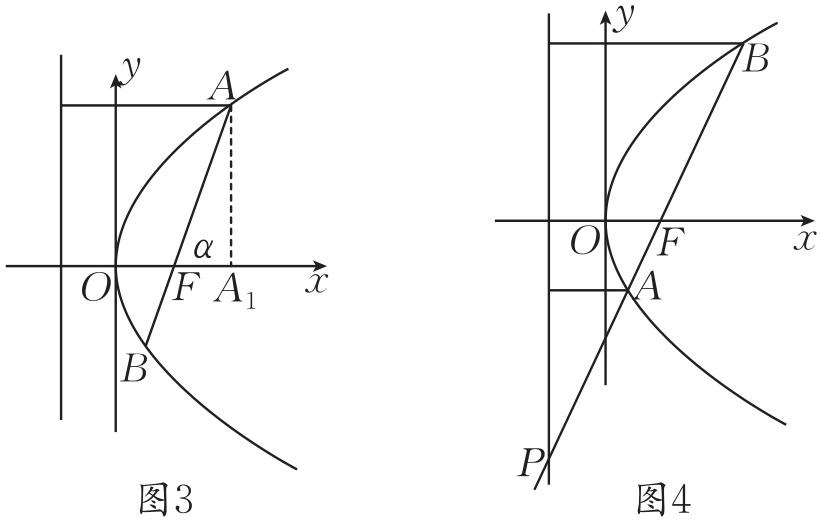
（2）当交双曲线于两支时，，（如图2）.

【焦比定理】双曲线焦比定理和椭圆的焦比定理一致：

当交双曲线于一支时，令，即，代入焦长公式可得.

当交双曲线于两支时，，代入焦长公式可得.

### **三、焦比体系之抛物线**



已知抛物线,焦点为,为过焦点的弦， ,则有以下结论：

【焦半径倾斜角式】，（如图3）.

【焦点弦倾斜角式】.

【焦点三角形面积】.

【焦比定理】设 ,则，.

【几何结论】设交准线于点，则 ， （如图4）.

典例 （1）已知椭圆，,分别是其左、右焦点，过右焦点的直线交椭圆于,两点，连接并延长交椭圆于点， ,当弦最短时，，则椭圆的方程为.

（2）已知，分别为双曲线的左、右焦点，斜率为的直线过分别交双曲线左、右支于，点，，则双曲线的渐近线方程为.

（3）（2024·河南模考）已知抛物线的焦点为，过点的直线交抛物线于，两点，若，，成等比数列，则线段在轴上的射影长为.

[解析]（1）当轴时，，此时为椭圆的通径.由于，故根据焦长公式得，

整理得，所以.

又，所以，又因为，解得或（舍去），，所以椭圆的方程为.

（2）因为，所以，设直线的倾斜角为 ，则,.

由双曲线的焦比体系结论，得,,

由得，整理得，即,所以双曲线的渐近线方程为.

（3）设直线的倾斜角为，

过点和分别作准线的垂线，垂足分别为和，过作于点（图略），

由抛物线的定义可得 ，

即，所以，

同理，可得，所以，

所以，

又，所以，

因为，，成等比数列，所以，

所以，所以，即，

所以或，

因为线段在轴上的射影长为，

所以.



1.利用焦长焦比体系要非常熟悉推导过程（定义余弦定理），在处理解答题的时候，若用本模块公式则必须给出必要证明.

2.公式属于结论公式，用上就能很快解题，和角度相关的题，优先考虑应用此公式.

### **磨尖训练**

1. 已知,分别为椭圆的左、右焦点，过的直线交椭圆于，两点，若轴，且，则椭圆的离心率为( C ).

A. B. C. D.

[解析]由焦长公式，，整理得，即.故选.

2. （多选题）已知抛物线的焦点为，过点的直线与交于,两点，为的中点，则下列说法正确的是( AD ).

A. 的最小值为4 B. 的最大值为4

C. 当时， D. 当时，

[解析]设直线的倾斜角为 ，不妨设点在第一象限.

对于，，当时取得最小值，故正确；

对于，，当时，取得最小值，故错误；

对于，，所以，

由焦比公式得，，即，

所以，故错误；

对于，，解得，所以，故正确.故选.

3. [2024·黄冈模拟]已知抛物线的焦点为，过焦点的直线交抛物线于,两点，且，则抛物线的准线方程为.

[解析]由抛物线焦比体系结论可知，即，所以抛物线的准线方程为.